Limites de fonctions

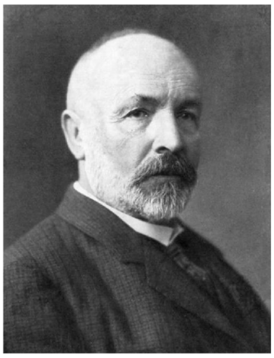
Objectifs :

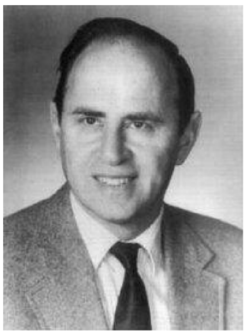
- Comprendre les notions de limite finie ou infinie d'une fonction, en un point ou à l'infini
- Savoir déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions
- Savoir déterminer les limites par minoration, majoration, encadrement
- Savoir interpréter graphiquement les limites obtenues

Aperçu historique :

La notion de limite est étroitement liée à celle d'infini. Au v° s. av. JC, Zénon d'Elée *propose des paradoxes qui utilisent la notion d'infini. Au iv° s. av. JC,* Aristote *écrit que l'infini est "ce qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de limites". Pour Aristote, l'infini, n'ayant pas de limite, n'est pas déterminé et donc n'existe pas en soi. Mais dès le iii° s. av. JC,* Archimède *construit une théorie mathématique dans laquelle la notion d'infini est présente.*
*Le concept d'infini sera précisé au xvii° s., lorsqu'*Isaac Newton *et* Gottfried Wilhem Leibniz *poseront les bases du calcul différentiel (calcul des dérivées). Mais il faut attendre le xix° s. pour que* Bernard Bolzano*, logicien et mathématicien tchèque, tente de construire un calcul purement mathématique de l'infini. Puis* Georg Cantor*, un mathématicien allemand, définira l'égalité de deux ensemble infinis. Il précisera la différence entre infini dénombrable (que l'on peut compter), comme le nombre d'éléments dans l'ensemble* $\mathbb{N}$*, et infini indénombrable, comme le nombre d'éléments dans l'ensemble* $\mathbb{R}$*. Cantor affirme qu'il n'existe aucun ensemble dont le nombre d'éléments soit compris entre ces deux infinis. Cette hypothèse s'appelle "hypothèse du continu". La démonstration de cette hypothèse constituait le premier de la célèbre liste des 23 problèmes de* Hilbert*, que celui-ci avait établie pour le congrès international des mathématiciens de 1900 à Paris, afin de guider la recherche en mathématiques du siècle alors naissant.*
Ce n'est qu'en 1963 que le mathématicien américain Paul Cohen *démontra que cette hypothèse était "indécidable" : on ne peut pas démontrer qu'elle est vraie, ni qu'elle est fausse.*


Bolzano


Cantor


Cohen

1. Définitions et premières propriétés

Exemple 5.1 La fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$ a pour "valeur interdite" $x = -1$: il est impossible de calculer $f(-1)$ car cela conduirait à diviser par 0. Dans cette partie, on essaiera d'étudier les valeurs de $f(x)$

lorsque x prend une valeur très proche de -1 (on dit lorsque "x tend vers -1". On s'intéressera aussi au comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

A. Limites d'une fonction lorsque x tend vers $+\infty$

Dans ce paragraphe, f est une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle du type $]a;+\infty[$.

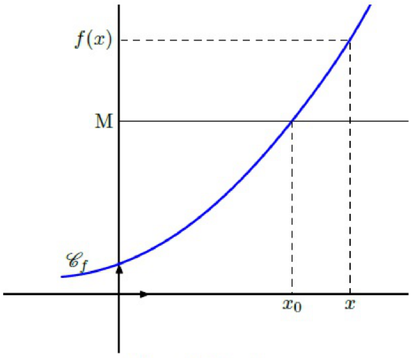
a. Limite infinie

Définition 5.1 On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$ on ait $f(x) > A$. On écrit alors :

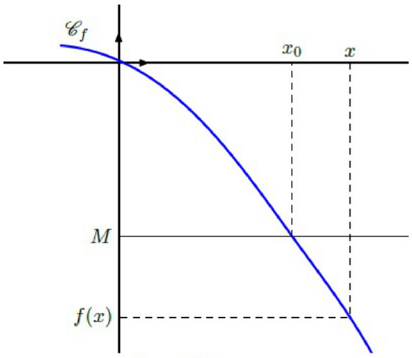
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A < 0$, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$ on ait $f(x) < A$. On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Propriété 5.1 Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration Laissée en exercice de même que celle de la Pté 5.2 : il suffit d'appliquer la définition.

Remarque 5.1 On a une définition comparable d'une limite infinie lorsque x tend vers $-\infty$.

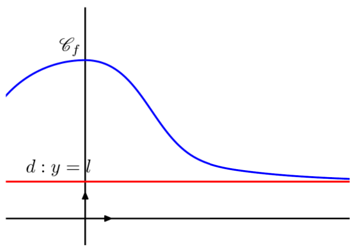
Propriété 5.2 La fonction $x \mapsto x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$
La fonction $x \mapsto x^3$ a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$
On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

b. Limite réelle. Asymptote horizontale.

Définition 5.2 Soit ℓ un réel. On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que pour $x > x_0$ on a $f(x) \in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$. On écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$: "la courbe se rapproche de la droite lorsque les x deviennent grands".



Propriété 5.3 (admise) Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $\ell = 0$ en $+\infty$.

Démonstration C'est encore une application directe de la définition ; attention au signe lorsque l'on passe à l'inverse : comme x tend vers $+\infty$, on peut choisir de travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, par exemple.

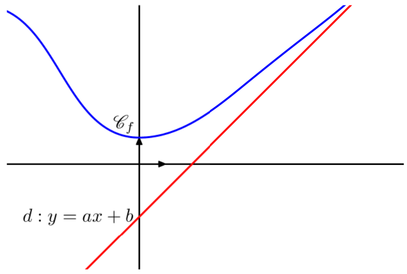
Remarque 5.2 On a une définition comparable d'une limite réelle ℓ lorsque x tend vers $-\infty$.

c. Asymptote oblique

Définition 5.3 On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f lorsque :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0\right)$$

En d'autres termes, l'écart entre la courbe et son asymptote tend vers 0 quand $x \to +\infty$ (resp. $-\infty$).



d est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

B. Limite d'une fonction lorsque x tend vers un réel a

Dans ce paragraphe, on considère une fonction numérique f ayant un ensemble de définition $\mathscr{D}_f$. La lettre a désigne un réel vérifiant une des deux propositions ci-dessous :

- ou bien $a \in \mathscr{D}_f$;
- ou bien a est une borne d'un intervalle contenu dans $\mathscr{D}_f$.

Exemple 5.2 Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f =]-\infty;-1[\cup]+1;+\infty[$, (par exemple, f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$), alors on peut avoir : ou bien $a \in \mathscr{D}_f$, ou bien $a = -1$ ou $a = 1$.

a. Limite infinie en a

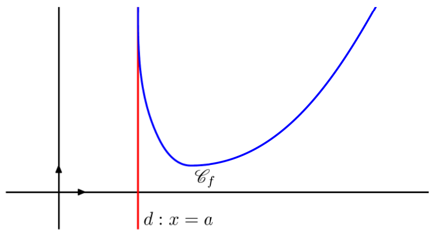
Définition 5.4 On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap\mathscr{D}_f$, on ait $f(x) > A$. On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a (ou quand x tend vers a) si, pour tout réel $A < 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap\mathscr{D}_f$, on ait $f(x) < A$. On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Dans ces deux cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple 5.3 Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $a = 0$ est une borne de $\mathscr{D}_f$. On peut donc étudier la limite de f lorsque x tend vers 0 : lorsque x se rapproche de 0, $\sqrt{x}$ se rapproche également de 0 tout en restant positif, donc les nombres $f(x)$ deviennent aussi grands qu'on le souhaite. Ainsi :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

L'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Remarque 5.3 La fonction inverse ($f : x \mapsto \frac{1}{x}$) n'a pas une mais deux limites en 0 : en effet, si x se rapproche de plus en plus de 0, soit on a $x < 0$ soit on a $x > 0$. Dans le premier cas, les valeurs de $f(x)$ sont négatives et leurs valeurs absolues deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à gauche en 0 est $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0;\ x<0} f(x) = -\infty$$

Dans le deuxième cas, les valeurs de $f(x)$ sont positives et deviennent de plus en plus grandes ; on dit que la limite à droite en 0 est $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0;\ x>0} f(x) = +\infty$$

b. Limite finie en a

Définition 5.5 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en a (ou quand x tend vers a) si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap \mathscr{D}_f$, on a $f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$. On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

On admet les résultats suivants :

- lorsque $a \geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- si f est une fonction polynôme et $a \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- si f est le quotient de deux polynômes et $a \in \mathscr{D}_f$, on a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

...mais je vous invite à les démontrer à titre d'exercice.

2. Calcul de limites

A. Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, ℓ et ℓ' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaitre sur les sommes, produits et quotients de limites de deux fonctions f et g.
Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a. Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une *forme indéterminée* : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

a. Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

b. Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

c. Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

Cas où la limite de la fonction g n'est pas nulle :

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si g a pour limite	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Cas où la limite de la fonction g est nulle :

Si f a pour limite	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et si g a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

d. Composition de limites

Dans les théorèmes suivants, les lettres α, β et ℓ désignent chacune soit un nombre réel soit $\pm\infty$. u et f sont deux fonctions telles que $f(u)$ existe sur un intervalle dont une borne est α.

Théorème 5.1 (admis) Si on a $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X \to \beta} f(X) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \ell$

Exemple 5.4 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{4x+9}{x-1}}$.
f est la composée de la fonction rationnelle u définie par $u(x) = \frac{4x+9}{x-1}$ suivie de g qui est la fonction racine carrée. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} u(x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} g(X) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par composition } \lim\limits_{x \to 1^+} g(u(x)) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 4 \\ \lim\limits_{X \to 4} g(X) = 2 \end{array}\right\} \text{ donc par composition } \lim\limits_{x \to +\infty} g(u(x)) = 2$$

Théorème 5.2 (admis) Soit u une suite numérique de limite α et soit f une fonction numérique telle que $f(u_n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$. Alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 5.5 Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \cos\left(\frac{n\pi+4}{6n}\right)$. Déterminer la limite de v.
Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n\pi+4}{6n}$. On montre que pour $n > 0$ on a $u_n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3n}$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{\pi}{6}$. Or $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B. Polynômes et fractions rationnelles

Propriété 5.4 La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est celle de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple 5.6

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x^2 - 5x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{-x^2} = \lim_{x \to -\infty} -2x = +\infty$$

Démonstration Factoriser le terme de plus haut degré.

C. Théorèmes de comparaison

Théorème 5.3 [des gendarmes] Soient f, g et h trois fonctions numériques et ℓ un réel. Si on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$;
- pour x suffisamment grand, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Démonstration Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Pour x suffisamment grand on a $f(x) \in I$ et $h(x) \in I$ (c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > x_0$ on a $f(x) \in I$ et $h(x) \in I$).
De plus, pour x suffisamment grand, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (c'est-à-dire qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > x_1$ on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$).
En prenant $x_2 = \max(x_0, x_1)$ on a pour tout $x > x_2$: $g(x) \in I$ (car il est compris entre $f(x)$ et $g(x)$ qui sont dans I).
Ainsi tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les $g(x)$ pour x suffisamment grand. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Propriété 5.5 Soient f et g deux fonctions numériques telles que pour x suffisamment grand $f(x) \leq g(x)$ et avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Remarque 5.4 Ces propriétés sont également vraies dans le cas des limites en $-\infty$ ou en a ; il faut alors adapter l'expression « pour x suffisamment grand » à la situation.

Exemple 5.7 Soit $f : x \longmapsto \frac{sin(x)}{x}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Propriété 5.6 Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est explicitement au programme (démonstration "ROC").
   - Pour $n = 1$
     Montrons tout d'abord que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
     Soit $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} \end{array}$ En tant que somme d'exponentielle et de polynôme, g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (sur $\mathbb{R}$, mais ici on travaille sur $\mathbb{R}_+$).
     $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^x - x$.
     De la même manière, la fonction g' est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
     $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g''(x) = e^x - 1$.
     Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant 1$, donc $g''(x) \geqslant 0$.
     Ainsi g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g'(0) = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant 1$. Par transitivité de l'inégalité, $g'(x) \geqslant 0$, donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
     Or $g(0) = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant 1$. Par transitivité de l'inégalité, $g(x) > 0$, i.e. $e^x > \frac{x^2}{2}$.
     Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

     On s'intéresse à une limite en $+\infty$, donc on ne perd pas en généralité en supposant $x > 0$.
     $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$, et par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$. Donc, par minoration, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
   - Pour $n > 1$
     Pour tout réel x non nul, $\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n}$ donc $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$.
     $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, et comme $\frac{1}{n} > 0$,
     $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right) = +\infty$.
     De plus, $\lim_{X \to +\infty} X^n = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2. Démonstration du second point : $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
   On s'intéresse à une limite en $-\infty$, donc on ne perd pas en généralité en supposant $x < 0$.
   Ce second point découle directement du premier point. Posons $y = -x$, il vient :
   $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim_{y \to +\infty} (-y)^n e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \epsilon \frac{y^n}{e^y}$, où $\epsilon = +1$ si n est pair, et $\epsilon = -1$ si n est impair.
   D'après le premier point, $\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^n} = +\infty$. Donc, par passage à l'inverse, $\lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{e^y} = 0$. Ainsi, par produit, $\lim_{y \to +\infty} \epsilon \frac{y^n}{e^y} = 0$, i.e. $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.
3. Démonstration du dernier point : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ (cas de "$n = \frac{1}{2}$").
   Ce dernier point est simplement une généralisation du premier point au cas $n = \frac{1}{2}$.
   La démarche est similaire, on montre qu'à partir d'une certaine valeur (puisqu'on travaille en $+\infty$ on ne perd pas en généralité) on a $\frac{e^x}{\sqrt{x}} > \frac{\sqrt{x}}{2}$, i.e. $e^x > \frac{x}{2}$, en étudiant les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - \frac{x}{2}$. On conclut par minoration que puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a bien $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.